
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

In der letzten Präsenzübung geht es um Differentialgleichungen. Sämtliche zeitlich sich ändernden Phänomene in der Physik werden letztlich durch Differentialgleichungen beschrieben, die Bewegungsgleichungen, die damit von fundamentaler Bedeutung für die Physik sind.

[P31] *Kraftstoß*

Eine Masse m falle aus einer Höhe h. Die Anfangsbedingungen lauten also $z(0) = h$ und $\dot{z}(0) = 0$. Während des Falles erfährt die Masse nun einen Kraftstoß

$$F_{\text{Stoß}}(t) = \gamma\,\delta(t - \sqrt{h/g})\,, \quad \gamma \geq 0\,.$$

Studieren Sie die Bewegung der Masse wie folgt:

(a) Geben Sie die Gesamtkraft F_{gesamt} an.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung durch zweimalige Integration.

(d) Skizzieren Sie die Lösung $z(t)$ für einige „typische“ Werte von γ als Funktion von t.

[P32] *Logistische Differentialgleichung*

Diese Differentialgleichung kennen wir schon aus der Aufgabe mit den Elefanten, [H23]. Allgemein ist dies ein Modell für die Entwicklung einer Population gemäß

$$\dot{P}(t) = \alpha P(t)(\beta - P(t))\,, \quad \alpha, \beta > 0\,.$$

Der Faktor $\beta - P(t)$ hemmt das Wachstum großer Populationen.

(a) Lösen Sie die ODE (Ordinary Differential Equation = Gewöhnliche Differentialgleichung) durch Trennung der Variablen.

(b) Welchen Grenzwert erreicht $P(t)$ für $t \to \infty$? Lässt sich dies auch direkt aus der ODE ablesen?

(c) Starten Sie mit einer kleinen Population $0 < P(0) \ll \beta$. Bei welcher charakteristischen Population P_{crit} verlangsamt sich das Wachstum? Skizzieren Sie $P(t)$.

[P33] *Eulersche Differentialgleichung*

Welche Methode aus der Vorlesung greift im Falle der Differentialgleichung

$$xy''' + 2y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0\,?$$

Lösen Sie diese auf dem Intervall $x \in (0, \infty)$.